Ensaio sobre as relações entre coeficientes e raízes da equação quadrática

www.matematicaemdados.com.br

Relações entre coeficientes e raízes da equação quadrática

Célia Maria Batista Nogueira[i]
Djanir Angelim da Silva Filho[ii]
Thiago Aires Angelim[iii]
20.06.2020

Introdução

Na busca por estratégia para solucionar problemas que envolvem equação quadrática, seja em concurso, olimpíadas de matemática ou na escola regular precisamos de ferramenta que otimize o processo de cálculo.

Este ensaio abordará as principais relações que envolvem os coeficientes (parâmetros) e as raízes de uma equação do segundo grau ou equação quadrática visando disponibilizar ferramentas tanto aos candidatos a concurso, quanto aos professores que em suas múltiplas atividades e pouca carga horária muitas vezes não têm tempo para um aprofundamento dos conteúdos programáticos.

Os pré-requisitos utilizados neste estudo são os conteúdos de potência, produtos notáveis e fatoração, temas que geralmente são abordados na escola regular, nos livros didáticos ou apostilas. Esses conteúdos permitem desenvolver relações ou ferramentas que agilizam o processo de cálculo na solução de diversos tipos de problemas que permeiam os concursos públicos, olimpíadas de matemática, livros didáticos e testes de raciocínio lógico no nível do ensino fundamental.

Equação quadrática: relações entre coeficientes e raízes.

Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, e $a \neq 0$, temos:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sendo $\Delta = b^2-4ac$

♦ Soma entre as raízes.

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1+x_2=\frac{-2b}{2a}$$

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

♦ Produto entre as raízes.

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}-b}{2a}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta}+b}{2a}\right)(-1)$$

$$x_1\cdot x_2=-\left(\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2-b^2}{4a^2}\right)$$

$$x_1\cdot x_2=-\left(\frac{\Delta-b^2}{4a^2}\right)$$

$$x_1\cdot x_2=-\left(\frac{b^2-4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

$$x_1\cdot x_2=-\left(\frac{-4ac}{4a^2}\right)$$

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Existe uma relação entre as raízes de um polinômio e seus coeficientes (graças à decomposição em fatores que causam essas raízes).

Seja o polinômio $ax^2+bx+c=0$, sendo r_1 e r_2 as raízes do polinômio, temos:

$$x^2-(r_1+r_2)x+(r_1\cdot r_2)=0$$

Fórmulas de Cardano-Viéte. Tirado (2109, p.41)

I - Caso: O coeficiente $a=1$.

Dada a equação $x^2+bx+c=0$, observa-se que $a=1$. Logo podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1\cdot x_2=c \end{cases}$$

Portanto as raízes são dois números que satisfaçam a condição de soma e produto.

Exemplo 1.
Calcular as raízes da equação $x^2-5x+6=0$
Solução:
Usando a relação soma e produto, temos que encontrar dois números cuja soma seja 5 (oposto de –5) e o produto seja 6. A partir de uma breve tentativa temos: $\begin{cases}(2)+(3)=5\\(2)\times(3)=6\end{cases}$. Logo $x_1=2$ ou $x_2=3$.

Exemplo 2.
Calcular as raízes da equação $x^2+9x+14=0$
Solução:
Usando a relação soma e produto, temos que encontrar dois números cuja soma seja (–9) (oposto de 9) e o produto seja 14. A partir de uma breve tentativa temos: $\begin{cases}(-2)+(-7)=-9\\(-2)\times(-7)=14\end{cases}$.
Logo $x_1=-2$ ou $x_2=-7$.

II - Caso: O coeficiente $a \neq 1$.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tal que $a \neq 1$, não devemos aplicar o processo anterior, pois não seria prático ter como resultado da soma ou do produto entre as raízes valores fracionários. Neste caso vamos usar um artifício: dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, chamemos de equação *primitiva*, vamos transformar em uma outra equação, a qual chamaremos de equação *transformada*, onde o coeficiente do primeiro termo seja 1 e o termo independente seja o produto $(\boldsymbol{ac})$.

Equação primitiva: $ax^2 + bx + c = 0$

Equação transformada: $x^2 + bx + ac = 0$

Observe que as raízes da equação *transformada* podem ser encontradas usando o processo do caso anterior.

Equação transformada $x^2 + bx + ac = 0$.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \end{cases}$$

Equação primitiva $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right) \end{cases}$$

Observe que os valores entre parênteses são raízes da equação transformada.

$$x_1 = \frac{1}{a}x' \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{1}{a}x''$$

Logo as raízes da equação primitiva é a razão entre as raízes da equação transformada e o coeficiente $\boldsymbol{a}$ da equação primitiva.

Exemplo 3.

Calcular as raízes da equação $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Solução:

Equação transformada: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Vimos que as raízes dessa equação são os valores 2 e 3. Portanto as raízes da equação primitiva são:

$$x_1 = \frac{2}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{3}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

Exemplo 4. (WMTC/2014)

Se $xy \neq 1$ e $\begin{cases} 5x^2 + 1001x + 1025 = 0 \\ 1025y^2 + 1001y + 5 = 0 \end{cases}$ encontre o valor para x/y.

Solução:

Transformando ambas equações temos.

$$\begin{cases} x^2 + 1001x + 5125 = 0 \\ y^2 + 1001y + 5125 = 0 \end{cases}$$

Agora as equações possuem as mesmas raízes.

Sejam r e s raízes das equações transformadas.

Temos $x_1 = \frac{r}{5}$; $y_1 = \frac{r}{1025}$; $x_2 = \frac{s}{5}$; $y_2 = \frac{s}{1025}$

Usaremos apenas uma das raízes, pois o resultado é o mesmo.

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{r}{5}}{\frac{r}{1025}} = \frac{r}{5} \cdot \frac{1025}{r} = 205$$

Exemplo 5. (CN/1986)

A média harmônica entre as raízes da equação $340x^2 - 13x - 91 = 0$ é:

Solução:

A média harmônica entre os valores x_1 e x_2 é dado por:

$$mh = \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2P}{S}$$

$$mh = \frac{2\left(-\frac{91}{340}\right)}{\left(\frac{13}{340}\right)} = \frac{-2 \cdot 91}{13} = -14$$

Exemplo 6.

Determine k na equação $x^2 - 4x + k = 0$ sendo r e s suas raízes e sendo $s^s \cdot r^r \cdot s^r \cdot r^s = 256$.

Solução:

$s^s \cdot s^r \cdot r^r \cdot r^s = 256 \Rightarrow s^{r+s} \cdot r^{r+s} = 256$

$(s \cdot r)^{r+s} = 256 \Rightarrow P^S = 256 \Rightarrow k^4 = 4^4$

Logo $k = 4$

Exemplo 7.

Mostre a composição da equação quadrática conhecida suas raízes e utilize a relação para compor a equação cujas raízes são 3 e –6.

Solução:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a \neq 0$, dividindo a equação por a,temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sabemos que $(b/a) = -S$ e $(c/a) = P$.

Temos $x^2 - Sx + P = 0$

Sendo S e P, soma e produto das raízes, respectivamente.

$S = x_1 + x_2 = 3 + (-6) = -3$

$P = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-6) = -18$

Composição.

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

♦ Diferença entre as raízes.

$$x_1 - x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Exemplo 8.
A média aritmética de dois números positivos é 13 e a média geométrica é 12. A diferença entre esses números é:
Solução:
Sejam os números x_1 e x_2, tal que:
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 13 \Rightarrow x_1 + x_2 = 26$$
$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} = 12 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 12^2 = 144$$
Compondo a equação: $x^2 - 26x + 144 = 0$
$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{1}$$
$$x_1 - x_2 = \sqrt{26^2 - 24^2}$$
$$x_1 - x_2 = \sqrt{(26 + 24)(26 - 24)}$$
$$x_1 - x_2 = \sqrt{100}$$
$$x_1 - x_2 = 10$$

Exemplo 9.
As raízes da equação $2x^2 - x - 16 = 0$ são r e s, $(r > s)$. O valor da expressão abaixo é:
$$\frac{r^4 - s^4}{r^3 + r^2 s + r s^2 + s^3}$$
Solução:
$$\frac{r^4 - s^4}{r^3 + r^2 s + r s^2 + s^3} = \frac{(r^2 + s^2)(r^2 - s^2)}{(r^2 + s^2)(r + s)}$$
$$= \frac{(r^2 - s^2)}{(r + s)} = \frac{(r + s)(r - s)}{(r + s)} = r - s$$
$$r - s = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2}$$
$$r - s = \frac{\sqrt{129}}{2}$$

Exemplo 10.
Sejam r e s raízes da equação $x^2 - 2x + m = 0$.
O valor de $m \in \mathbb{R}$, para que $r^2 - s^2 = 2$ é:
Solução:
$$r^2 - s^2 = (r + s)(r - s) = 2$$
$$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right) = 2$$
$$2((-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m) = 2(\div 2)$$
$$4 - 4m = 1 \Rightarrow 4m = 3$$
$$m = \frac{3}{4}$$

♦ Soma entre os inversos das raízes.
Seja S e P a soma e o produto entre as raízes, temos.
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P}$$

Exemplo 11.
Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $x^2 + 4x + 1 = 0$
Solução:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-4}{1} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -4$$

Exemplo 12. (WMTC/2018)
Para $a = 1, 2, 3, \cdots, 2018$, as raízes da equação $x^2 - 2x - a^2 - a = 0$, $a > 0$ são $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \cdots, \alpha_{2018}, \beta_{2018}$, então
$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\beta_3} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{2018}} + \frac{1}{\beta_{2018}} =$$
Solução:
Podemos escrever a equação na forma:
$$x^2 - 2x - a(a + 1) = 0$$
Sendo seus coeficientes:
$a = 1$; $b = -2$; $c = -a(a + 1)$
Sabe-se que:
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{\mathrm{P}} = -\frac{2}{a(a + 1)}$$
Portanto para os valores: $a = 1, 2, 3, \cdots, 2018$, temos.
$$\frac{-2}{1 \cdot 2} + \frac{-2}{2 \cdot 3} + \frac{-2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{-2}{2018 \cdot 2019} =$$
$$= -2\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2018 \cdot 2019}\right)$$
Cada fração do parêntese é do tipo:
$$\frac{b - a}{a \cdot b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$
Observe.
$$\frac{2 - 1}{1 \cdot 2} + \frac{3 - 2}{2 \cdot 3} + \frac{4 - 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2019 - 2018}{2018 \cdot 2019}$$
Temos:
$$= -2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right)$$
$$= -2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2019}\right)$$
$$= -2\left(\frac{2018}{2019}\right) = -\frac{4036}{2019}$$

♦ Soma entre os quadrados das raízes.
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = S^2 - 2P$$

Exemplo 13.
Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + 5x + 2 = 0$.

Solução:
$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$
$x_1^2 + x_2^2 = (-5)^2 - 2 \cdot 2$
$x_1^2 + x_2^2 = 25 - 4 = 21$

Exemplo 14.
Calcule m para que a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 - mx + 2m + 4 = 0$ seja igual a 13.
Solução:
$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 13$
$m^2 - 2(2m + 4) = 13$
$m^2 - 4m - 21 = 0$
Resolvendo por soma e produto temos.
$m_1 = 7$ ou $m_2 = -3$

Exemplo 15.
Calcule a de modo que a soma dos quadrados das raízes de $x^2 + (a - 5)x - (a + 4) = 0$ seja igual a 17.
Solução:
$S^2 - 2P = 17$
$[-(a - 5)]^2 - 2[-(a + 4)] = 17$
$(a - 5)^2 + 2(a + 4) = 17$
$a^2 - 10a + 25 + 2a + 8 = 17$
$a^2 - 8a + 16 = 0$
$(a - 4)^2 = 0$, logo $a = 4$ (raiz dupla)

♦ Soma entre os inversos dos quadrados das raízes.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

Exemplo 16.
Calcule a soma dos inversos dos quadrados das raízes da equação $x^2 - (a + b)x + ab = 0$.
Solução:
Temos $S = a + b$ e $P = ab$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{(ab)^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab}{a^2 b^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

Exemplo 17.
Se x_1 e x_2 são raízes da equação
$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então a expressão abaixo vale:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

Solução:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{\frac{c}{a}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \cdot \frac{a}{c}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}$$

♦ Soma entre os cubos das raízes.
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2)$
$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$

Exemplo 18.
Determine a soma dos cubos das raízes de $x^2 - 2x + 3 = 0$.
Solução:
$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$
$x_1^3 + x_2^3 = 2^3 - 3 \cdot 3 \cdot 2$
$x_1^3 + x_2^3 = 8 - 18$
$x_1^3 + x_2^3 = -10$

♦ Soma entre os inversos dos cubos das raízes.

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3}$$

Exemplo 19.
Determine a soma dos inversos dos cubos das raízes de $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Solução:

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3}$$

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{2^3 - 3 \cdot (-3) \cdot 2}{(-3)^3}$$

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = -\frac{26}{27}$$

Exemplo 20. (CN/2009)
A menor raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "$m + n$" é expressor por:
Solução:
Seja x_1 e x_2 raízes da equação e $x_1 > x_2$

$$x_2 = \sqrt{m \cdot x_1} \Rightarrow x_2^2 = m \cdot x_1 \Rightarrow m = \frac{x_2^2}{x_1}$$

$$x_1 = \sqrt{n \cdot x_2} \Rightarrow x_1^2 = n \cdot x_2 \Rightarrow n = \frac{x_1^2}{x_2}$$

$$m + n = \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} \Rightarrow m + n = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 \cdot x_2}$$

$$m + n = \frac{S^3 - 3PS}{P}$$

$$m + n = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)}$$

$$m + n = \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow m + n = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} \cdot \frac{a}{c}$$

$$m + n = \frac{3abc - b^3}{a^2 c}$$

♦ Equações equivalentes.

Dizemos que duas equações são equivalentes quando possuem as mesmas raízes.

Dada as equações $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ px^2 + qx + r = 0 \end{cases}$

Se duas equações são equivalentes então possuem um fator de proporcionalidade entre seus coeficientes.

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} p = ka \\ q = kb \\ r = kc \end{cases}$$

Sendo a; b e $c \neq 0$

Sejam as equações $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \text{ (I)} \\ kax^2 + kbx + kc = 0 \text{ (II)} \end{cases}$

Na equação I, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na equação II, temos:

$$x = \frac{-(kb) \pm \sqrt{(kb)^2 - 4 \cdot (ka) \cdot (kc)}}{2(ka)}$$

$$x = \frac{-kb \pm \sqrt{k^2 b^2 - 4 \cdot ka \cdot kc}}{2ka}$$

$$x = \frac{-kb \pm \sqrt{k^2(b^2 - 4ac)}}{2ka}$$

$$x = \frac{-kb \pm k\sqrt{b^2 - 4ac}}{2ka}$$

$$x = \frac{k\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2ka}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa-se que as duas equações possuem as mesmas raízes.

Exemplo 21.

Sendo as equações $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 9x^2 - 15x + 6 = 0 \end{cases}$ equivalentes, mostre a proporcionalidade entre os seus coeficientes.

Solução:

$$k = \frac{3}{9} = \frac{-5}{-15} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esse resultado mostra que se multiplicarmos a segunda equação por $(1/3)$ gera a primeira equação. Observa-se que a primeira equação está na forma irredutível, pois seus coeficientes são números primos entre si.

Exemplo 22.

Calcular $(m - n)$ sabendo que as equações $\begin{cases} (2m + 1)x^2 - (3m - 1)x + 2 = 0 \\ (n + 2)x^2 - (2n + 1)x - 1 = 0 \end{cases}$ são equivalentes:

Solução:

$$\frac{2m + 1}{n + 2} = \frac{-(3m - 1)}{-(2n + 1)} = \frac{2}{-1}$$

ou

$$\frac{2m + 1}{n + 2} = \frac{3m - 1}{2n + 1} = -2$$

Temos.

$$\frac{2m + 1}{n + 2} = -2 \Rightarrow 2m + 2n = -5$$

$$\frac{3m - 1}{2n + 1} = -2 \Rightarrow 3m + 4n = -1$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2m + 2n = -5 \\ 3m + 4n = -1 \end{cases}$.

Temos $m = -9$ e $n = 13/2$

$$m - n = -9 - \frac{13}{2} = -\frac{31}{2}$$

♦ Equações com uma raiz comum.

Teorema. Se α é raiz dos polinômios f e g, então α é uma raiz do $mdc\,(f, g)$. Iezzi (1993, p.188)

Dada as equações $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ px^2 + qx + r = 0 \end{cases}$

Pela condição dos polinômios possuir uma raiz comum, podemos afirmar que os mesmos não são primos entre si, ou seja, o mdc é diferente de um. Usando o algoritmo de Euclides ou método das divisões sucessivas, podemos calcular a relação entre os coeficientes das equações.

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx+c & px^2+qx+r \\ \cline{2-2} -ax^2-\dfrac{aq}{p}x-\dfrac{ar}{p} & \dfrac{a}{p} \\ \hline \left(\dfrac{bp-aq}{p}x+\dfrac{cp-ar}{p}\right) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} px^2+qx+r & \dfrac{bp-aq}{p}x+\dfrac{cp-ar}{p} \\ \cline{2-2} -px^2-\dfrac{p(cp-ar)}{bp-aq}x & \dfrac{p^2}{bp-aq}x+\dfrac{pq(bp-aq)-p^2(cp-ar)}{(bp-aq)^2} \\ \hline \dfrac{q(bp-aq)-p(cp-ar)}{bp-aq}x+r & \\ -\dfrac{q(bp-aq)-p(cp-ar)}{bp-aq}x-\dfrac{[pq(bp-aq)-p^2(cp-ar)](cp-ar)}{p(bp-aq)^2} & \\ \hline \left(\dfrac{pr(bp-aq)^2-[pq(bp-aq)-p^2(cp-ar)](cp-ar)}{p(bp-aq)^2}\right) & \end{array}$$

Polinômio A: ax^2+bx+c

Polinômio B: px^2+qx+r

Quociente 1 (Q_1): $\dfrac{a}{p}$

Resto 1 (R_1): $\dfrac{bp-aq}{p}x+\dfrac{cp-ar}{p}$

Quociente 2 (Q_2): $\dfrac{p^2}{bp-aq}x+\dfrac{pq(bp-aq)-p^2(cp-ar)}{(bp-aq)^2}$

Resto 2: (R_2): $\dfrac{pr(bp-aq)^2-[pq(bp-aq)-p^2(cp-ar)](cp-ar)}{p(bp-aq)^2}$

	Q_1	Q_2
A	B	R_1
R_1	R_2	

Observa-se que no segundo resto aparecem apenas constantes, portanto não podemos continuar a divisão. A condição necessária e suficiente para que R_1 seja o maior divisor comum entre os polinômios é que R_2 seja nulo.

$$pr(bp-aq)^2-[pq(bp-aq)-p^2(cp-ar)](cp-ar)=0$$
$$pr(bp-aq)^2-[pq(bp-aq)(cp-ar)-p^2(cp-ar)^2]=0$$
$$pr(bp-aq)^2-pq(bp-aq)(cp-ar)+p^2(cp-ar)^2=0$$
$$p(bp-aq)[r(bp-aq)-q(cp-ar)]+p^2(cp-ar)^2=0$$
$$p(bp-aq)[bpr-\boldsymbol{aqr}-cpq+\boldsymbol{aqr}]+p^2(cp-ar)^2=0$$
$$p(bp-aq)[bpr-cpq]+p^2(cp-ar)^2=0$$
$$p(bp-aq)[p(br-cq)]+p^2(cp-ar)^2=0$$
$$p^2(bp-aq)(br-cq)+p^2(cp-ar)^2=0(\div p^2)$$
$$(bp-aq)(br-cq)+(cp-ar)^2=0$$
$$(cp-ar)^2=-(bp-aq)(br-cq)$$
$$(cp-ar)^2=(aq-bp)(br-cq)$$

Para uma melhor memorização vamos permutar os termos do primeiro membro, assim como os fatores do segundo termo de cada binômio.

$$(a\cdot r-p\cdot c)^2=(a\cdot q-p\cdot b)(b\cdot r-q\cdot c)$$

Exemplo 23.

Calcule a para que as equações $\begin{cases} x^2+x+a=0 \\ x^2+ax+1=0 \end{cases}$ possuam pelo menos uma raiz comum.

Solução:

Aplicando relação para as equações.

$(a\cdot r-p\cdot c)^2=(a\cdot q-p\cdot b)(b\cdot r-q\cdot c)$

Equações $\begin{cases} x^2+x+a=0 \\ x^2+ax+1=0 \end{cases}.$

$(1\cdot 1-1\cdot a)^2=(1\cdot a-1\cdot 1)(1\cdot 1-a^2)$

$(1-a)^2=(a-1)(1-a^2)$

$(1-a)^2-(a-1)(1-a^2)=0$

$(1-a)^2+(1-a)(1-a)(1+a)=0$

$(1-a)^2+(1-a)^2(1+a)=0$

$(1-a)^2[1+(1+a)]=0$

$(1-a)^2(a+2)=0$

Temos $a_1=1$ ou $a_2=-2$

Observa-se que se $a=1$ temos duas raízes comuns, pois temos equações equivalentes, se $a=-2$ temos apenas uma raiz comum.

Exemplo 24.

Calcular m para que as equações $\begin{cases} x^2-6x+m=0 \\ x^2-11x+6m=0 \end{cases}$ e tenham uma raiz comum.

Solução:

Aplicando relação para as equações.

$(a\cdot r-p\cdot c)^2=(a\cdot q-p\cdot b)(b\cdot r-q\cdot c)$

Equações $\begin{cases} x^2-6x+m=0 \\ x^2-11x+6m=0 \end{cases}$

$(6m-m)^2=(-11+6)(-36m+11m)$

$(5m)^2=-5(-25m)\Rightarrow 25m^2=125m$

$25m^2-125m=0\Rightarrow 25m(m-5)=0$

Temos $m_1=0$ ou $m_2=5$.

Exemplo 25.

O conjunto dos valores de m para o qual as equações $\begin{cases} 3x^2-8x+2m=0 \\ 2x^2-5x+m=0 \end{cases}$ possuam uma e apenas uma raiz real comum é:

Solução:

Aplicando relação para as equações.

$(a\cdot r-p\cdot c)^2=(a\cdot q-p\cdot b)(b\cdot r-q\cdot c)$

Equações $\begin{cases} 3x^2-8x+2m=0 \\ 2x^2-5x+m=0 \end{cases}$

$(3m-4m)^2=(-15+16)(-8m+10m)$

$(-m)^2=1(2m)\Rightarrow m(m-2)=0$

Temos $m_1=0$ ou $m_2=2$; logo $m\in\{0,2\}$

Considerações finais.

O presente trabalho se embasou em critérios matemáticos para obter os principais resultados envolvendo as relações entre coeficientes e raízes de equações quadráticas. Os resultados são usados para equacionar e resolver problemas do cotidiano. Esperamos que esse estudo, contribua para alunos da escola regular, participantes de concursos em geral e para os que se dedicam as olímpiadas de matemática. Temos certeza de que as questões propostas atendem os alunos de diversos níveis, facilitando assim o êxito de cada estudante. Pelo fato de a equação quadrática apresentar uma riqueza tanto em relações quanto em aplicações, é impossível circunscrever todas as relações nesse trabalho, daí a importância de expandir o tema em outros trabalhos e outros autores. É recomendável que os leitores experimentem a veracidade das relações usando as raízes das equações.

Siglas.

WMTC: World Mathematics Team Championship

CN: Colégio Naval

Referências.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: complexo, polinômios, equações. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 6.

TIRADO, Fernando Fueyo. Tese de mestrado. Disponível em: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/38485/TFM-G992.pdf?sequence=1>. Acesso 16.06.2020.

Post Scriptum[iv]

[i] Graduada e Mestra em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas do Amazonas.

[ii] Graduado em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas. Especialista em Educação Matemática pela Escola Superior Batista do Amazonas.

[iii] Acadêmico do curso de Administração na Universidade Estácio de Sá.

[iv] O presente ensaio resulta das experiências vivenciadas em sala de aula.